



1080

MODÈLE MATHÉMATIQUE DE LA VALLÉE DU SÉNÉGAL



RAPPORT SUR LE RÉGLAGE DU MODÈLE



TEXTE

SOCIÉTÉ GRENOBLOISE



D'ÉTUDES ET
D'APPLICATIONS
HYDRAULIQUES

GRENOBLE FRANCE

no 80

SOMMAIRE

<u>ABSTRACT</u>	1
<u>INTRODUCTION</u>	3
<u>CHAPITRE I - CHAPITRE PRELIMINAIRE DEFINISSANT LE BUT DE L'ETUDE, SON DEROULEMENT, LES RESULTATS GENERAUX ACQUIS ET PRECISANT LES CONCLUSIONS UTILES</u>	4
1. BUT DE L'ETUDE	4
2. DEROULEMENT DE L'ETUDE	4
3. EXTENSION GEOGRAPHIQUE DES ETUDES	6
4. DEFINITION SOMMAIRE DES MODELES UTILISES	8
5. RESULTATS ACQUIS AU COURS DU REGLAGE DU MODELE MAILLE	9
6. CONSIDERATIONS SUR CES RESULTATS	12
7. CONCLUSIONS SUR LE REGLAGE DU MODELE	15
8. RECOMMANDATIONS CONCERNANT LES FACONS D'AMELIORER LES CONNAISSANCES SUR LE FLEUVE	16
<u>CHAPITRE II - FORMULATION MATHEMATIQUE ET NUMERIQUE</u>	18
1. FORMULATION MATHEMATIQUE	18
1.1 Découpage du modèle	18
1.2 Lois d'échanges entre casiers	19

2.	RESOLUTION NUMERIQUE	22
2.1	Schéma explicite	23
2.2	Schéma implicite	23
2.3	Choix du schéma	24
3.	PROGRAMMATION	25
3.1	Principes généraux	25
3.2	Conditions aux limites	28
4.	CONSTRUCTION DU PROGRAMME	30
4.1	Etat initial	30
4.2	Données variables dans le temps	30
4.3	La définition topologique du modèle	30
4.4	La définition des casiers	30
4.5	La définition des liaisons	31
	<u>CHAPITRE III - LE REGLAGE DU MODELE MAILLE</u>	32
1.	GENERALITES	32
2.	LE MODELE, SA CONSTRUCTION	32
2.1	Les données topographiques	33
2.2	Le découpage du modèle	33
2.3	Préparation des données topographiques	34
2.4	Assemblage du modèle	35
2.5	Les données de crue	35
2.6	Les données de contrôle	35
3.	PRINCIPE DU REGLAGE	36
3.1	Bases du réglage	36
3.2	Cheminement suivi pour le réglage	36
3.3	Processus du réglage	37
4.	REGLAGE DU TRONCON GOUINA-BAKEL	37
4.1	Réglage du tronçon Gouina aval-Férou amont	38
4.2	Réglage du tronçon Férou aval- Bakel	39
5.	REGLAGE DU TRONCON BAKEL-KAEDI	40
5.1	Eléments disponibles permettant le contrôle	40
5.2	Reproduction des débits	41
5.3	Reproduction des niveaux	42
6.	REGLAGE DU TRONCON KAEDI-DAGANA	43
6.1	Eléments disponibles permettant le contrôle du réglage	43
6.2	Reproduction des débits	44
6.3	Reproduction des niveaux	46
6.4	Conclusion sur le réglage du secteur Kaédi-Dagana	48

7.	REGLAGE DU MODELE DE DAGANA A SAINT-LOUIS	48
7.1	Eléments disponibles permettant le contrôle du réglage	48
7.2	Reproduction des débits	48
7.3	Reproduction des niveaux	50
8.	CONCLUSION A CE STADE DE L'ETUDE	51

CHAPITRE IV - PASSAGE DE LA PREMIERE CRUE DE CONTROLE ET AMELIORATION DU REGLAGE

52

1.	DEROULEMENT DE CETTE PHASE D'ETUDE	52
2.	PASSAGE DE LA PREMIERE CRUE DE CONTROLE	52
2.1	Choix de la crue de contrôle	52
2.2	Résultats obtenus	53
2.3	Analyse des résultats	54
2.4	Conclusion partielle	54
3.	AMELIORATION DU REGLAGE POUR LES BAS NIVEAUX	55
4.	RESULTATS OBTENUS AVEC LES CRUES DE 1964 - 1966 ET 1968	56
4.1	Précisions moyennes absolues	56
4.2	Reproduction des niveaux maximaux	57
4.3	Analyse des résultats	58
5.	CRITIQUE DE LA CRUE DE 1964	58
6.	CRITIQUE DE LA CRUE DE 1966	59
7.	CRITIQUE DE LA CRUE DE 1968	60

CHAPITRE V - PASSAGE SUR LE MODELE DE LA CRUE DE 1969 COMME DEUXIEME CRUE DE CONTROLE

61

1.	CONSIDERATIONS GENERALES SUR LA CRUE DE 1969	61
2.	CARACTERISTIQUES DES ESSAIS REALISES	61
3.	EXAMEN DES RESULTATS DU PREMIER CALCUL - CRUE 1969 ₁	62
3.1	Considérations générales	62
3.2	Résultats acquis	63
3.3	Analyse des résultats	63
4.	EXAMEN DES RESULTATS DU DEUXIEME CALCUL - CRUE 1969 ₂	64
4.1	Considérations sur la crue 1969 ₂	64
4.2	Résultats acquis	65
5.	CONCLUSION	65

CHAPITRE VI - CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS	66
1. CONCLUSIONS	66
2. TYPES D'EXPLOITATION DU MODELE QUE L'ON PEUT ENVISAGER	66
2.1 Etude statistique des surfaces inondées	66
2.2 Etude d'un barrage intermédiaire	67
2.3 Etude de l'influence d'endigagements partiels sur l'évolution des crues	67
2.4 Etude du débit régularisé minimal permettant d'atteindre un but hydro-agricole fixé	67
2.5 Etude des problèmes liés à la navigation	67
3. RECOMMANDATIONS CONCERNANT LES ETUDES A REALISER POUR PARVENIR A UNE MEILLEURE CONNAISSANCE DU FLEUVE	68
3.1 Le Sénégal de Gouina à Bakel	68
3.2 Le Sénégal de Bakel à Kaédi	69
3.3 Le Sénégal de Kaédi à Dagana	69
3.4 Le Sénégal de Dagana à Saint-Louis	69
<u>ANNEXES</u>	71
ANNEXE 1 - DEFINITION DE LA CRUE DE 1964	72
ANNEXE 2 - DEFINITION DE LA CRUE DE 1968	77
ANNEXE 3 - DEFINITION DE LA CRUE DE 1966	79
ANNEXE 4 - DEFINITION DE LA CRUE DE 1969	82
ANNEXE 5 - LE MODELE UNIDIMENSIONNEL	90

LISTE DES GRAPHIQUES

- Graphique n° 1 - Modèle unidimensionnel. Crues de 1964 et 1965 à Gouina.
- Graphique n° 2 - Modèle unidimensionnel. Crue de 1964 dans le Sénégal.
- Graphique n° 3 - Modèle unidimensionnel. Crue de 1965 dans le Sénégal.
- Graphique n° 4 - Modèle maillé. Crue de 1964 dans le Sénégal.
- Graphique n° 5 - Modèle maillé. Crue de 1968 dans le Sénégal.
- Graphique n° 6 - Modèle maillé. Crue de 1966 dans le Sénégal.
- Graphique n° 7 - Modèle maillé. Crue de 1964 dans le Sénégal.
- Graphique n° 8 - Modèle maillé. Crue de 1964 dans le Doué.
- Graphique n° 9 - Modèle maillé. Crue de 1964 dans le delta du Sénégal.
- Graphique n° 10 - Modèle maillé. Modèle Gouina- Saint-Louis. Crue 1966₁ dans le Sénégal.
- Graphique n° 11 - Modèle maillé. Modèle Gouina-Saint-Louis. Crue 1966₁ dans le Doué.
- Graphique n° 12 - Modèle maillé. Modèle Gouina-Saint-Louis. Crue 1966₁ dans le delta du Sénégal.
- Graphique n° 13 - Modèle maillé. Modèle Bakel-Saint-Louis. Crue 1966₂ dans le Sénégal.
- Graphique n° 14 - Modèle maillé. Modèle Bakel-Saint-Louis. Crue 1966₂ dans le Doué.
- Graphique n° 15 - Modèle maillé. Modèle Bakel-Saint-Louis. Crue 1966₂ dans le delta du Sénégal.
- Graphique n° 16 - Modèle maillé. Crue 1968 dans le Sénégal.
- Graphique n° 17 - Modèle maillé. Crue 1968 dans le Doué.
- Graphique n° 18 - Modèle maillé. Crue 1968 dans le delta du Sénégal.
- Graphique n° 19 - Modèle maillé. Crue 1969₁ dans le Sénégal, sans le Gorgol.
- Graphique n° 20 - Modèle maillé. Crue 1969₁ dans le Doué, sans le Gorgol.
- Graphique n° 21 - Modèle maillé. Crue 1969₁ dans le delta du Sénégal, sans le Gorgol.
- Graphique n° 22 - Modèle maillé. Crue 1969₂ dans le Sénégal, avec le Gorgol.
- Graphique n° 23 - Modèle maillé. Crue 1969₂ dans le Doué, avec le Gorgol.
- Graphique n° 24 - Modèle maillé. Crue 1969₂ dans le delta du Sénégal, avec le Gorgol.

LISTE DES FIGURES

-

- Figure 1 - Carte du Sénégal.
Figure 2 - Schéma topologique.
Figure 3 - Loi hauteur-débit à Kayes.
Figure 4 - Loi hauteur-débit à Ambidédi.
Figure 5 - Loi hauteur-débit à Bakel.

-

ABSTRACT

Dans le cadre de l'étude de l'aménagement hydro-agricole de la vallée du Sénégal conduite par l'Organisation des Nations Unies pour la nourriture et l'agriculture (F.A.O.), SOGREAH a été retenue pour l'étude, sur modèle mathématique, de la propagation des crues du Sénégal entre Gouina et St-Louis .

SOGREAH doit mettre au point un outil capable de reproduire la propagation des crues dans l'état naturel, avec une précision acceptable sur les niveaux, et de donner au Maître d'Oeuvre des indications valables sur l'influence que les aménagements projetés auront sur des crues naturelles ou artificielles .

L'étude se décompose en deux phases bien distinctes . La première consiste, après avoir construit le modèle, à le régler à l'aide d'un certain nombre de crues représentatives des régimes du Sénégal . La seconde représente l'exploitation du modèle dans le cadre des avant-projets élaborés par la F.A.O.

Le présent rapport ne traite que de la première phase, c'est-à-dire du réglage du modèle maillé .

Le réglage a été réalisé au moyen de trois crues caractéristiques du Sénégal : une crue forte (1964), une crue moyenne (1966) et une crue faible (1968) . La qualité du réglage a été ensuite contrôlée par une crue moyenne (1969) .

Les résultats montrent que le modèle peut être considéré comme représentatif des conditions naturelles d'écoulement dans la gamme des niveaux étudiés . La précision moyenne obtenue est moins bonne que celle prévue au contrat ; elle reste cependant satisfaisante car elle intègre un nombre d'inconnues assez grand . Ces inconnues ne pourraient être levées qu'après des campagnes de mesures qui devraient être entreprises pendant plusieurs années . Leurs résultats ne seraient donc pas utiles au modèle .

La conclusion essentielle est que le modèle peut répondre à un certain nombre de questions, telles que :

- . étude des surfaces inondées par les crues naturelles ;
- . étude d'endiguements partiels ;
- . étude de crues artificielles modulées à partir de barrages accumulateurs amont ;
- . étude de barrage de reprise .

Par contre, si l'on voulait étudier des crues de fréquences centennale ou millennale avec un endiguement général de la vallée, il faudrait aménager le modèle afin de rendre les lois d'échange des débits compatibles avec les niveaux qui seraient atteints . Ces niveaux seraient en effet nettement supérieurs à ceux qui existeraient dans l'état actuel .

Il en est de même des études relatives à la navigation. En effet, on ne pourra donner aux résultats une valeur absolue trop grande car les points de calcul des lits mineurs sont trop distants pour permettre une représentation correcte des faibles niveaux caractéristiques des régimes d'étiage.

oOo

INTRODUCTION

-

Ce rapport présente la façon dont le modèle mathématique maillé de la Vallée du Sénégal a été conçu (formulations mathématiques), construit à partir des données topographiques et réglé .

Le modèle mathématique de la Vallée du Sénégal est un modèle dit maillé . C'est-à-dire qu'à l'encontre d'un modèle unidimensionnel classique qui suppose que les écoulements se font uniquement d'amont en aval et que les niveaux dans les lits mineur et majeur sont à chaque instant égaux en une section, le modèle maillé permet de tenir compte des écoulements réels dans les lits mineur et majeur . Par écoulements réels nous entendons des écoulements qui peuvent aller d'amont en aval dans les lits mineurs, des lits mineurs vers les lits majeurs ou vice-versa, de mailles du lit majeur à mailles du lit majeur, dans le sens d'amont vers l'aval ou de l'aval vers l'amont ou de droite à gauche ou en sens contraire . Le modèle prend donc en considération les écoulements tels qu'ils se produisent dans la nature .

La construction du modèle se traduit par la représentation numérique de la topographie et de l'hydrographie du fleuve et de son champ d'inondation et par l'élaboration des méthodes qui permettent de simuler une crue . Le réglage consiste en l'ajustement au moyen de crues de réglage des paramètres hydrauliques introduits dans le modèle, de manière à ce que n'importe quelle crue naturelle du Sénégal puisse être reproduite avec une précision acceptable compte tenu de la qualité des données .

Ce rapport est une synthèse de la première phase des études confiées à SOGREAH par la F.A.O. . Il correspond à une clause du contrat d'étude .

Nous y trouverons les chapitres suivants :

- . Chapitre I - Chapitre préliminaire qui présente sommairement le modèle, le déroulement de l'étude, les résultats obtenus et les conclusions générales que l'on peut en tirer ;
- . Chapitre II - Formulation mathématique et numérique ;
- . Chapitre III - Le réglage du modèle maillé ;
- . Chapitre IV - Passage de la première crue de contrôle et amélioration du réglage du modèle ;
- . Chapitre V - Passage sur le modèle de la crue de 1969 comme deuxième crue de contrôle ;
- . Chapitre VI - Conclusions et recommandations .

A la fin du rapport se trouvent cinq annexes . Les quatre premières concernent la définition des crues étudiées sur le modèle maillé et la dernière traite du modèle unidimensionnel .

Chapitre I

CHAPITRE PRELIMINAIRE DEFINISSANT LE BUT DE L'ETUDE, SON DEROULEMENT, LES RESULTATS GENERAUX ACQUIS ET PRECISANT LES CONCLUSIONS UTILES

1. BUT DE L'ETUDE

L'étude sur modèle mathématique de la propagation des crues du Sénégal a pour but de mettre à la disposition de la F.A.O. un moyen de vérifier rapidement l'effet des aménagements hydro-agricoles projetés sur les conditions naturelles d'écoulement des crues .

Les résultats attendus demandent donc un réglage préalable du modèle, afin d'être assuré que les indications qu'il donnera au cours de son exploitation auront une valeur relative sûre sinon une valeur absolue certaine . Nous distinguerons ces deux définitions de qualité du modèle car on n'est jamais certain de la qualité des données et que, par conséquent, la comparaison directe entre deux états conduit à des enseignements d'une crédibilité plus grande que la prise en compte de valeurs absolues .

Le modèle mathématique qui permet le mieux de reproduire des écoulements naturels dans le cas du Sénégal est un modèle maillé ; c'est-à-dire que le Sénégal et sa vallée sont divisés en casiers ou mailles reliés les uns aux autres par des lois d'échange des débits . Cette schématisation permet de retrouver des écoulements conformes à ceux observés dans la nature et, surtout, n'oblige pas à avoir, à chaque instant, les mêmes niveaux dans les lits mineur et majeur dans un profil en travers du fleuve, ce qui est le cas d'un modèle mathématique unidimensionnel .

2. DEROULEMENT DE L'ETUDE

Dans le paragraphe ci-dessus nous avons fait allusion à deux types de modèles mathématiques fluviaux : les modèles unidimensionnel et maillé .

Ces deux modèles ont été utilisés pour l'étude de la propagation des crues du Sénégal . Leurs objectifs étaient différents puisque les résultats que l'on peut attendre d'eux le sont également .

Nous avons donc commencé par construire un modèle unidimensionnel de la Vallée du Sénégal en respectant cependant un certain nombre de règles permettant de profiter du travail qui lui était consacré pour le modèle maillé qui était le modèle principal . Ce premier modèle a été prévu car il permet une mise en oeuvre plus rapide ainsi qu'un réglage plus souple car le modèle est moins lourd à exploiter .

Il avait pour but de tester les données topographiques, hydrographiques et hydrologiques d'une part et d'autre part, de régler les écoulements du lit mineur quand il n'y a pas de lit majeur (tronçon Gouina-Bakel). Ceci avait été rendu possible par un aménagement des programmes de calculs des écoulements fluviaux .

Ce modèle a été utilisé de novembre 1968 à février 1969 ; l'arrêt des essais a été décidé au cours de la réunion tenue à Grenoble les 24 et 25 février 1969 .

Pendant cette période la construction du modèle maillé s'est poursuivie et le premier calcul a été réalisé le 21 février 1969 . A partir de cette date nous nous sommes attachés au réglage du modèle maillé sur les crues de 1964 et 1968 . Le choix de ces crues n'est pas arbitraire. En effet, nous avons initialement retenu les crues de 1964 et 1965 car elles étaient associées à des campagnes de mesures ORSTOM ; la crue de 1965 étant assez semblable à celle de 1964, il nous a été demandé de conserver la crue forte (1964) et de choisir une autre crue parmi les plus faibles . La crue de 1968 présente cette qualité et a aussi l'avantage d'être postérieure à la construction de la digue périphérique du delta rive gauche du Sénégal (construction réalisée pendant la saison sèche 1964) .

Le réglage sur ces deux crues s'est poursuivi jusqu'au mois d'août 1969 ; au cours de la réunion des 7 et 8 août 1969 à Grenoble, nous étions à même de présenter les résultats qui allaient être exposés dans le rapport semestriel n° 3 . Ce rapport semestriel concluant que le modèle maillé pouvait être considéré comme réglé, une réunion s'est tenue à Rome le 18 novembre 1969 . Il nous a été demandé à la suite de ces entretiens, le 25 novembre 1969, de faire passer la première crue de contrôle sur le modèle . Les résultats ont été envoyés le 30 décembre 1969 et, au cours de la réunion des 19 et 20 janvier 1970, il fut décidé de poursuivre le réglage sur cette troisième crue . Les résultats furent acquis fin avril et firent l'objet du rapport semestriel n° 4 envoyé le 14 mai 1970 .

La réunion des 11 et 12 juin qui suivit cet envoi amena un constat des consultants que l'on peut résumer ainsi : compte tenu des inconnues et des incertitudes concernant certaines données, on peut considérer que le modèle maillé est acceptable dans son état actuel et qu'il est suffisamment précis pour les types d'exploitation que l'on peut envisager . Afin d'étayer cette conclusion, il nous fut également demandé de faire passer sur le modèle une quatrième crue, celle de 1969, au titre de deuxième crue de contrôle . Ce travail a été réalisé et les résultats envoyés le 7 juillet 1970 ; depuis on a considéré que le modèle maillé est réglé au mieux des connaissances actuelles concernant le Sénégal et qu'il peut donc être exploité dans le cadre des avant-projets hydro-agricoles dressés par la F.A.O. .

3. EXTENSION GEOGRAPHIQUE DES ETUDES

La vallée du Sénégal représentée par le modèle correspond à 1 000 km de fleuve depuis la limite amont (Gouina) jusqu'à la limite aval (Saint-Louis) .

Ces 1 000 km comprennent deux parties distinctes :

- . une partie amont à forte pente entre Gouina et Bakel (PK 202) coupée de rapides (Gouina, chutes du Félou) ; la vallée est encaissée et il n'y a pas de débordement caractérisé ;
- . une partie à faible pente, en aval de Bakel ; la vallée s'élargit progressivement jusqu'au delta du Sénégal . Elle est inondée annuellement sur 10 à 30 km de largeur selon les crues ; c'est la vallée proprement dite, lieu des cultures de décrue.

Cette vallée peut, à son tour, être divisée en trois tronçons :

- de Bakel à Kaédi (km 464) où l'inondation se fait surtout en rive gauche . On y trouve le marigot de Diavagne qui alimente la rive gauche et la draine en décrue ;
- de Kaédi à Dagana (km 827) . Le Sénégal, entre les points kilométriques 515 et 750 se divise en deux bras : le Doué à gauche et le Sénégal à droite . La vallée est alors divisée en trois zones distinctes :
 - entre le Doué et le diéri sénégalais,
 - entre le Doué et le Sénégal, l'Ile A. Morphil,
 - entre le Sénégal et le diéri mauritanien (lao, toro),
- de Dagana à Saint-Louis (km 996).

Entre Dagana et Rosso (km 863), le Sénégal se resserre sur son lit mineur et, ensuite, on trouve l'élargissement du delta du Sénégal . Côté Sénégal l'expansion est actuellement limitée par la digue périphérique rive gauche construite en 1964 . Côté Mauritanie le lit s'élargit et prend une grande importance avec la dépression de l'Aftout Es Sahel qui s'étend jusqu'à Nouakchott . Cette dépression est intéressée par les crues supérieures à la moyenne .

Les deux affluents principaux du Sénégal sont :

- . la Falémé en rive gauche ; son confluent se trouve à une trentaine de kilomètres en amont de Bakel . Ses débits sont connus à Kidira, 50 km en amont du confluent ;
- . le Gorgol en rive droite ; il débouche à hauteur de Kaédi et son cours inférieur constitue le oualodu Gorgol . Ses débits sont mal connus .

On trouve également des affluents mineurs, tous situés en rive droite et en amont du Gorgol . On a ainsi :

- . le Kolimbiné au PK 66,5 entre Félou et Kayes ;
- . le Karakoro au PK 149 en amont du confluent du Sénégal et de la Falémé (PK 172) ;

- le Niordé (PK 260) en amont de Waoundé ;
- le Ghorfa (PK 321) entre Waoundé et Matam ;

A partir de Dagana on trouve un certain nombre de défluent, les débits empruntés ne revenant plus au Sénégal. Nous avons :

- le lac de R'Kiz à hauteur de Dagana (PK 827) ;
- le lac de Guiers à hauteur de Richard-Toll (PK 851) ;
- les ouvrages de la rive gauche du delta du Sénégal : N'Tiagar (PK 863), Ronq (PK 889), Diaouar (PK 896), Caimans (PK 914), Dieg (PK 944) ;
- l'Aftout Es Sahel (PK 930) à hauteur de Débi.

Les stations limnimétriques s'échelonnent tout au long du Sénégal et du Doué. Nous avons :

- sur le Sénégal :

Gouina	PK 0'
Félou amont et aval	PK 57
Kayes	PK 73,50
Ambidédi	PK 115,50
Bakel	PK 202
Waoundé	PK 282
Matam	PK 373
Kaédi	PK 464
Défluence du Doué	PK 514
Saldé	PK 522
Boghé	PK 617
Podor	PK 729
Confluence du Doué	PK 751
Dagana	PK 827
Richard-Toll	PK 851
Rosso	PK 863
Ronq	PK 889
Diaouar	PK 896
Caimans	PK 914
Débi	PK 930
Saint-Louis	PK 996

- Sur le Doué, en repérant les stations par rapport au Sénégal :

N'Goui PK 522

Guédé PK 686

4. DEFINITION SOMMAIRE DES MODELES UTILISES

Avant d'aller plus loin, nous pensons qu'il est intéressant de définir en quelques mots les caractéristiques principales des deux modèles utilisés .

4.1 Le modèle unidimensionnel

C'est un modèle qui permet de résoudre les équations de Saint-Venant en supposant que les écoulements ne peuvent se faire que parallèlement à l'axe du lit et que les niveaux d'eau dans les lits majeur et mineur sont, dans une section quelconque du modèle, égaux à chaque instant . C'est donc un modèle relativement simple à mettre en oeuvre et à utiliser ; cependant, il est limité, dans un cas semblable à celui du Sénégal, dans son exploitation après réglage . De plus, quand les écoulements dans le lit majeur sont loin d'être négligeables, il ne peut traduire les écoulements réels et, en particulier les échanges de débit entre les différentes parties du fleuve .

Il n'a donc eu qu'un rôle limité en apparence, celui de tester les données . En réalité, il a servi très utilement car il nous a montré les zones où des problèmes se posent . Ces zones ont été retrouvées sur le modèle maillé et la résolution des problèmes n'a pas toujours été possible . Les études et résultats acquis à l'aide de ce modèle sont consignés dans l'annexe n° 5, en fin du rapport .

4.2 Le modèle maillé

C'est un modèle plus complexe car il permet aux écoulements de se faire dans des sens semblables à ceux observés dans la nature . De plus, les niveaux dans les différentes mailles qui sont associées à une maille du lit mineur peuvent être très différents et ne dépendent que des lois d'échange des débits entre mailles et des lois de volume des mailles .

C'est donc un modèle qui permet, quand les points de contrôle sont nombreux et les données complètes, de reproduire des écoulements naturels avec une grande précision . Dans le cas où les renseignements disponibles sont moins nombreux, il permet cependant de schématiser les écoulements avec une plus grande fidélité que le modèle unidimensionnel .

Nous n'entrerons pas dans le détail du modèle car un chapitre du rapport lui sera consacré ; dans ce chapitre nous définirons la façon dont les équations sont prises en compte par le programme de calcul ainsi que le principe de la résolution numérique .

5. RESULTATS ACQUIS AU COURS DU REGLAGE DU MODELE MAILLE

5.1 Généralités

Le réglage du modèle a été, ainsi que nous l'avons dit dans le paragraphe 2 de ce chapitre, réalisé au moyen des crues de 1964, 1968 et 1966 .

Les deux premières crues citées ont été celles qui ont permis le réglage d'ensemble, la crue de 1966 ayant servi à améliorer certaines zones de ce même réglage .

Le réglage a été rendu long et laborieux en raison du manque de connaissance sur le processus d'inondation du lit majeur et aussi sur les conditions d'écoulement car les échelles existantes sont toutes dans le lit mineur . De plus, un certain nombre de données participant à la genèse ou à l'évolution de l'onde de crue manquaient et il a donc fallu essayer de les déterminer car leur influence se fait sentir sur certains tronçons du fleuve . Les négliger conduit à diminuer la précision tandis que les prendre en compte entraîne l'apparition de paramètres supplémentaires qu'il n'est pas logique, en principe, de considérer comme tels .

Contractuellement, les critères du réglage sont uniquement basés sur les niveaux, le contrat précisant que : "une précision de ± 10 cm sur les niveaux moyens du lit mineur sera jugée satisfaisante . Cette précision sera calculée en effectuant la moyenne arithmétique des valeurs absolues des écarts journaliers constatés pendant une période de 6 mois correspondant au développement de la crue du fleuve . En outre, les maxima de la crue seront déterminés avec un écart qui ne devra pas être supérieur à 10 cm sous réserve des mesures complémentaires sur le terrain dont l'exécution pourra être reconnue nécessaire conformément aux dispositions de l'article (5) (d)" .

Parvenir à une précision de ± 10 cm implique une connaissance topographique, hydrographique et hydrologique précise et homogène sur toute la surface du domaine représenté . Quand il n'en est pas ainsi, le moindre flottement dans les données pénalise considérablement le réglage .

C'est pourquoi cette clause assez sévère concernant la précision était tempérée par le texte du paragraphe (e) article V "Le Modèle sera établi d'après les documents existants à la signature du contrat . Si la précision du réglage du modèle spécifiée à l'article 1 (c) (iii) ci-dessus n'est pas atteinte, il appartiendra à l'Organisation de décider sur la nécessité ou non d'entreprendre des mesures complémentaires sur le terrain . Tout programme complémentaire ainsi décidé en vue des résultats du réglage du modèle n'est pas compris dans le présent contrat" .

Après passage de la deuxième crue de contrôle (1969), la précision moyenne générale sur l'ensemble des 4 crues est de 0,14 m et le modèle est considéré comme réglé .

5.2 Résultats du réglage

Dans les tableaux suivants nous avons porté les précisions moyennes absolues obtenues aux différentes stations du fleuve ainsi que les valeurs des maxima observés et calculés et leurs écarts .

Les crues de référence sont celles de :

- . 1964 sur le modèle Gouina - Saint-Louis ;
- . 1966₁ sur le modèle Gouina - Saint-Louis ;
- . 1966₂ sur le modèle Bakel - Saint-Louis ;
- . 1968 sur le modèle Gouina - Saint-Louis ;
- . 1969₁ sur le modèle Gouina - Saint-Louis sans tenir compte du Gorgol ;
- . 1969₂ sur le modèle Gouina - Saint-Louis en tenant compte du Gorgol .

Stations	1964	1966 ₁	1966 ₂	1968	1969 ₁	1969 ₂
Férou aval	0,094	0,109		0,086	0,120	0,120
Kayes	0,083	0,119		0,077	0,106	0,106
Ambidédi	0,095	0,121		0,067		
Bakel	0,104	0,192		0,145	0,171	0,170
Waoundé	0,143	0,127	0,070	0,145	0,158	0,158
Matam	0,108	0,197	0,159	0,168	0,172	0,169
Kaédi	0,104	0,211	0,151	0,195	0,232	0,182
Saldé	0,128	0,192	0,187	0,227	0,283 (0,245)	0,212 (0,174)
N'Goui	0,128	0,199	0,175	0,136	0,187	0,123
Boghé	0,128	0,199	0,185	0,228	0,299	0,217
Guédé	0,138	0,150	0,163			
Podor	0,089	0,115	0,155	0,122	0,200	0,144
Dagana	0,110	0,118	0,130	0,081	0,136	0,116
Richard-Toll	0,113	0,075	0,108	0,082	0,100	0,102
Rosso	0,123	0,107	0,124	0,104		
Ronq	0,113	0,090	0,126		0,119	0,102

Les précisions entre parenthèses à Saldé, pour les crues de 1969₁ et 1969₂ correspondent à des corrections apportées aux observations naturelles qui semblent être entachées d'une erreur systématique pendant la période correspondant au maximum de la crue .

Les résultats partiels du tableau ci-dessus conduisent aux précisions moyennes suivantes :

- . 1964 précision moyenne sur 16 stations 0,112 m
- . 1966₁ précision moyenne sur 16 stations 0,145 m
- . 1966₂ précision moyenne sur 12 stations 0,144 m
- . 1968 précision moyenne sur 14 stations 0,133 m
- . 1969₁ précision moyenne sur 13 stations 0,175 m
- . 1969₂ précision moyenne sur 13 stations 0,147 m

On remarque donc que les précisions restent acceptables ; ce sont les crues de réglage (1964 et 1968) qui conduisent aux meilleurs résultats.

Dans les tableaux suivants nous avons porté les valeurs des maxima observés ($Z_{\max N}$) et calculés ($Z_{\max C}$) et les différences $\Delta Z_{\max} = Z_{\max C} - Z_{\max N}$

Stations	1964			1968		
	$Z_{\max N}$ (I.G.N.)	$Z_{\max C}$ (I.G.N.)	ΔZ_{\max} (m)	$Z_{\max N}$ (I.G.N.)	$Z_{\max C}$ (I.G.N.)	ΔZ_{\max} (m)
Felou aval	32,16	32,43	+ 0,27	28,51	28,59	+ 0,08
Kayes	31,68	31,77	+ 0,09	27,62	27,70	+ 0,08
Ambidédi	28,54	28,40	- 0,14	24,69	24,81	+ 0,12
Bakel	23,72	23,66	- 0,06	20,12	20,13	+ 0,01
Waoundé	19,53	19,53	0	17,24	17,00	- 0,24
Matam	15,94	15,89	- 0,05	13,81	13,71	- 0,10
Kaédi	12,77	12,80	- 0,03	10,85	10,82	- 0,03
Saldé	11,49	11,48	- 0,01	9,18	9,11	- 0,07
N'Gouï	11,35	11,29	- 0,06	9,12	9,13	+ 0,01
Boghé	8,91	8,86	- 0,05	7,01	6,86	- 0,15
Guédé	6,87	6,93	+ 0,06			
Podor	6,10	6,10	0	3,94	4,02	+ 0,08
Dagana	4,08	4,08	0	2,36	2,36	0
Richard-Toll	3,51	3,54	+ 0,03	1,99	1,96	- 0,03
Rosso	3,32	3,37	+ 0,05	1,92	1,83	- 0,09
Ronq	2,93	3,08	+ 0,15			

Stations	1966 ₁			1966 ₂		
	$Z_{\max N}$ (I.G.N.)	$Z_{\max C}$ (I.G.N.)	ΔZ_{\max} (m)	$Z_{\max N}$ (I.G.N.)	$Z_{\max C}$ (I.G.N.)	ΔZ_{\max} (m)
Felou aval	30,36	30,54	+ 0,18			
Kayes	29,62	29,79	+ 0,17			
Ambidédi	26,95	27,11	+ 0,16			
Bakel	22,86	23,18	+ 0,32			
Waoundé	19,11	19,25	+ 0,14	19,11	19,05	- 0,06
Matam	15,59	15,63	+ 0,04	15,59	15,50	- 0,09
Kaédi	12,38	12,51	+ 0,13	12,38	12,41	+ 0,03
Saldé	10,99	11,08	+ 0,09	10,99	10,95	- 0,04
N'Gouï	10,83	10,91	+ 0,08	10,83	10,79	- 0,04
Boghé	8,55	8,50	- 0,05	8,55	8,41	- 0,14
Guédé	6,62	6,57	- 0,05	6,62	6,50	- 0,12
Podor	5,64	5,65	+ 0,01	5,64	5,52	- 0,12
Dagana	3,60	3,79	+ 0,19	3,60	3,71	+ 0,11
Richard-Toll						
Rosso	2,94	3,05	+ 0,11	2,94	2,97	+ 0,03
Ronq	2,63	2,77	+ 0,14	2,63	2,69	+ 0,06

Stations	1969 ₁			1969 ₂		
	Z max _H (I.G.N.)	Z max _C (I.G.N.)	Δ Z max (m)	Z max _H (I.G.N.)	Z max _C (I.G.N.)	Δ Z max (m)
Félou aval	29,78	29,68	- 0,10	29,78	29,68	- 0,10
Kayes	28,87	28,94	+ 0,07	28,87	28,94	+ 0,07
Bakel	21,27	21,52	+ 0,25	21,27	21,52	+ 0,25
Waoundé	18,20	18,18	- 0,02	18,20	18,18	- 0,02
Matam	14,81	14,79	- 0,02	14,81	14,80	- 0,01
Kaédi	11,95	11,86	- 0,09	11,95	11,88	- 0,07
Saldé	10,59	10,31	- 0,28	10,59	10,33	- 0,26
N'Goui	10,23	10,22	- 0,01	10,23	10,24	+ 0,01
Boghé	8,00	7,87	- 0,13	8,00	7,90	- 0,10
Podor	5,14	5,05	- 0,09	5,14	5,07	- 0,07
Dagana	3,20	3,32	+ 0,12	3,20	3,34	+ 0,14
Richard-Joll	2,73	2,80	+ 0,07	2,73	2,81	+ 0,08
Ronq	2,35	2,35	0	2,35	2,36	+ 0,01

A ces tableaux sont annexés les graphiques 7 à 24 qui montrent la reconstitution des crues par le modèle (les croix portées sur les graphiques correspondent aux observations nature, les traits continus aux limnigrammes calculés) .

6. CONSIDERATIONS SUR CES RESULTATS

6.1 On remarque que les précisions et les écarts entre les niveaux maxima calculés et observés ne sont pas toujours homogènes pour une même station mais que dans l'ensemble ils répondent, du moins pour ces derniers, à des valeurs assez peu différentes des ± 10 cm contractuels. En effet, aux stations où les différences sur les écarts au maximum de la crue sont grands, on constate qu'ils sont supérieurs à 0,25 m en général et qu'alors on ne peut plus considérer que le modèle est seul en cause ; les crues étudiées représentent une gamme assez étendue des crues du Sénégal et il s'ensuit que souvent les écarts maxima apparaissent pour des cotes qui pour d'autres crues ne conduisent pas à des écarts anormaux .

6.2 Les graphiques 7 à 24 montrent les résultats obtenus aux stations équipées d'échelles limnimétriques . Les évolutions des crues sont assez bien reproduites bien que pour les crues faibles on note une certaine déformation de l'onde de crue ; ces déformations tendent à retarder la montée de la crue et la décrue . Il est bien évident alors que la précision moyenne est pénalisée très fortement car les gradients sont souvent pendant ces périodes de plusieurs décimètres par jour .

6.3 Les déformations des ondes de crues sont dues au fait que chaque crue a son caractère propre et que la façon dont le lit majeur intervient diffère à chaque fois . En effet, les marigots qui font communiquer les lits mineurs avec les lits majeurs comportent des seuils sableux ou limoneux qui sont plus ou moins vite érodés selon la crue . Il s'ensuit donc qu'une crue faible n'aura pas la puissance de les détruire tandis qu'une crue forte le fera très rapidement . Les conditions dans lesquelles les lits majeurs sont intéressés par les crues sont donc légèrement différentes chaque année . Or, le modèle mathématique représente par définition un état moyen . Cette remarque ressort du réglage du modèle sur les crues de 1964 et 1968 . La première, crue très forte, nous a amené à baisser les liaisons entre les lits majeur et mineur afin de faire participer au maximum la vallée à l'écoulement ; la seconde, crue très faible, demandait, pour être réglée, un exhaussement des mêmes seuils bas . Le modèle représente donc un état moyen dans lequel la crue de 1964 est correcte tandis que celle de 1968 est déformée .

6.4 De Matam à Podor les décrues modèle sont excédentaires pendant la phase de descente rapide, c'est-à-dire que les niveaux calculés sont nettement plus haut que les niveaux observés . Nous sommes parvenus à cette situation car à un stade du réglage, après avoir introduit la pluie et l'évaporation, nous avions un déficit de débit dans le tiers aval du modèle . Pour pallier cette insuffisance, nous avons alors abaissé un certain nombre de seuils de liaison entre les lits mineur et majeur afin de vidanger un peu plus les mailles du lit majeur . Nous avons donc récupéré du débit de cette manière, mais avons également accentué la déformation de l'onde de crue signalée au paragraphe 6.3 .

6.5 Parmi les remarques que l'on peut faire, il en est une qui intéresse les débits transitant dans le lit majeur rive droite, au droit de Dagana . Les résultats de la crue de 1964 ont montré que le débit pouvait être important : de l'ordre de 1 250 m³/s au maximum . Les débits qui empruntent le lit mineur à Dagana sont en accord avec ceux que l'on peut évaluer à partir de la loi hauteur-débit et il n'est donc pas possible de les augmenter .

On se trouve donc devant un fait qui est en contradiction avec les commentaires de la littérature concernant le Sénégal et qui disent que les débits qui passent dans le lit majeur rive droite sont toujours négligeables .

Nous ne sommes pas parvenus à résoudre le problème car la propagation de la crue est telle qu'il n'est pas possible de retarder davantage ce débit . On pourrait peut-être admettre qu'une partie se perd dans les cordons inter-dunaires situés au Nord de Dagana, mais cela ne résoud pas encore la question .

- 6.6 Une difficulté du réglage provient aussi de la méconnaissance du processus dans lequel l'île A. Morphil intervient dans la propagation de la crue et les échanges entre le Doué et le Sénégal. En effet, en amont de l'île, les débits dans le Sénégal à Saldé et le Doué à N'Goui sont différents et le Doué l'emporte nettement sur le Sénégal. Par contre, dans la partie aval de l'île A. Morphil, on a un renversement de cet état, les débits transitant dans le Sénégal à Podor étant nettement plus importants que ceux restant dans le Doué à Guédé et Guia. On assiste donc à un échange continu de débits entre le Doué et le Sénégal, les marigots de l'île A. Morphil servant de lien entre les deux lits mineurs. Il nous a fallu beaucoup de temps pour parvenir à un schéma raisonnable et cohérent avec les données disponibles.
- 6.7 En ce qui concerne les lois hauteur-débit, le modèle a montré que :
- . la loi de Kayes est univoque, les écarts par rapport à la courbe moyenne présentant une dispersion minimale et englobant les derniers jaugeages ;
 - . celle d'Ambidédi, sous l'influence des niveaux de Bakel, présente un caractère non univoque pour les hauts niveaux ;
 - . celle de Bakel n'est pas univoque et doit présenter un caractère cyclique moins accentué qu'en aval cependant. La loi tracée à partir des résultats du modèle intègre parfaitement les derniers jaugeages effectués par la brigade hydrologique de Kayes et par Sénégal-Consult. Ces lois sont définies par les fig. 3, 4 et 5 hors texte.
- 6.8 Le modèle a permis de mettre en évidence le fait que le lit majeur du Sénégal, entre le confluent de la Falemé et Diawara où il commence dans le modèle que nous avons construit, n'est pas négligeable. En effet, les calculs du modèle unidimensionnel, comme ceux du modèle maillé, donnaient à Bakel, en 1964 et 1965, des crues plus pointues et en avance, alors que les crues naturelles étaient arrondies. Une telle déformation d'un limnigramme ne peut venir que de l'effet d'un lit majeur qui écrête la crue et restitue ensuite une partie du débit. Nous avons alors introduit en amont de Bakel une maille unique dont nous avons bâti la loi de surface en fonction de la cote afin de trouver le volume de stockage nécessaire. Nous avons donc fait de la topographie à partir du modèle. Après plusieurs calculs, nous nous sommes arrêtés car il devenait de plus en plus difficile d'ajuster la loi de stockage.

Ces difficultés ont quand même eu une conséquence regrettable pour les autres crues qui avaient leur maximum dans la gamme des niveaux où la crue 1964 est mal réglée, c'est-à-dire entre les cotes IGN 21 et 23 environ. Les maxima calculés ont alors été nettement supérieurs à ceux observés, mais il faut bien voir que sans l'introduction de cette maille en amont de Bakel les écarts auraient encore été plus grands.

- 6.9 Entre Saldé et Podor on trouve un seuil, le seuil de Mafou Sarépoli où se produit une rupture de pente du Sénégal . A certaines époques une échelle a existé mais pour les crues de référence aucune donnée limnimétrique n'était disponible . Nous avons donc éprouvé de grandes difficultés à caler les lignes d'eau entre Saldé-Boghé d'une part et Podor-Dagana d'autre part .
- 6.10 Nous venons de voir les points principaux qui ont attiré notre attention au cours de l'étude ; il en est d'autres que nous signalerons dans le chapitre spécial consacré au réglage . Nous pensons que dans ce chapitre nous devons maintenant dégager les conclusions de cette phase de l'étude .

7. CONCLUSIONS SUR LE REGLAGE DU MODELE

- 7.1 La conclusion essentielle sur le réglage du modèle est que, comme nous l'avons vu au paragraphe 5 de ce chapitre, les précisions moyennes obtenues sont acceptables . On peut noter que la précision des crues de réglage 1964 et 1968 est meilleure que celle des crues de contrôle. Ceci est très logique, car on ne peut demander au modèle la même précision pour des crues de contrôle dont souvent les données sont très incomplètes .
- 7.2 La précision aux stations situées dans la zone de l'île A. Morphil (Saldé, Boghé, N'Goui, Guédé) est, d'une manière générale, moins bonne qu'aux autres stations . Les raisons principales en sont les suivantes : lois hauteur-débit moins sûres qu'ailleurs car les campagnes de mesure ont été peu nombreuses ; observations limnimétriques peu sûres, seules les erreurs de lecture nettes étant décelables ; échelles limnimétriques constituées d'éléments métriques qui n'ont pas été recalés entre eux depuis longtemps ; mauvaise connaissance des conditions d'inondation de l'île A. Morphil .
- 7.3 Le modèle est correctement ajusté en ce qui concerne l'étude des surfaces inondées pendant une période déterminée (30 à 40 jours) . En effet, les déformations des limnigrammes n'entachent pas d'une erreur altimétrique importante les durées observées et calculées correspondantes .
- 7.4 Le modèle peut-être utilisé pour les études ci-dessous :
- étude des surfaces inondées par les crues naturelles et, établissement d'une statistique permettant de prévoir une évolution dans le temps de l'agriculture traditionnelle de décrue à une agriculture moderne par irrigation ;

- . étude de l'influence d'aménagements locaux sur les conditions de propagation des crues ;
- . étude de l'influence de barrages placés dans la vallée et essai de détermination de lois de fonctionnement ; dans ce dernier cas il faudrait modifier le programme de calcul si l'on voulait vraiment introduire des lois de vannage liées aux niveaux amont et aval . Sans modifier le programme on pourrait chercher à déterminer des lois de niveau amont du barrage à respecter pour remplir des conditions fixées à l'avance ;
- . recherche de la forme à donner à des hydrogrammes issus de barrages régulateurs de façon à obtenir des résultats fixés (superficie inondée, durée de submersion) avec une dépense minimale d'eau .

8. RECOMMANDATIONS CONCERNANT LES FAÇONS D'AMELIORER LES CONNAISSANCES SUR LE FLEUVE

Un certain nombre de mesures sur place seraient nécessaires pour améliorer les connaissances relatives à la propagation des crues . Le programme peut être très complet et nous le verrons après les chapitres consacrés au réglage . Nous pensons cependant qu'un certain nombre de mesures indispensables ne devraient pas conduire à des dépenses et investissements très importants . Nous aurons donc :

- 8.1 Vérification du zéro des échelles constituées d'éléments métriques installés sur les berges et contrôle du calage des éléments entre eux .
- Cette vérification nous paraît indispensable car depuis de nombreuses années aucun contrôle n'a été effectué et que l'on constate, progressivement, des décrochements dans les hauteurs observées (cf. monographie du Sénégal de l'ORSTOM, échelle de Boghé) .
- 8.2 Reprise des lectures à l'échelle de Sarépoli-Mafou . L'échelle existe puisque le projet Navigation a fait effectuer des lectures pendant la saison sèche 1968-1969 . Il faudrait donc les poursuivre pendant les crues afin de connaître les niveaux à la cassure de pente du Sénégal.
- 8.3 Reprendre des jaugeages à Dagana si l'on veut élucider la question du passage d'un débit important en rive droite .
- 8.4 Reprendre la lecture des niveaux aux échelles placées sur les ouvrages de prise du delta rive gauche, côté Sénégal .

Ces quatre points représentent un programme minimal dont seul le troisième demande des investissements importants car il suppose la réalisation de jaugeage continus pendant plusieurs crues .
On pourrait peut-être réduire son importance en cherchant uniquement à estimer les débits qui passent en rive droite par des observations par bateau accompagnées de lectures limnimétriques illustrées de quelques photos aériennes pour suivre l'évolution de l'inondation .

oOo

Chapitre II

FORMULATION MATHEMATIQUE ET NUMERIQUE

La reproduction d'un écoulement maillé conduit à représenter les déformations dans le temps t de la surface $Z = Z(x, y, t)$.

Le modèle mathématique doit donc comprendre 2 variables spatiales (x, y) et la variable temps t .

L'ensemble UNIMA ne permet pas de représenter convenablement tous les écoulements maillés. Il est conçu pour simuler l'écoulement d'une crue relativement lente sur un champ d'inondation ou un delta. La formulation mathématique du problème a conduit en effet à adopter certaines hypothèses de calcul.

1. FORMULATION MATHEMATIQUE

On aurait pu tenter de résoudre le problème posé par la représentation de l'écoulement maillé par analogie avec les équations de propagation de la marée, avec un terme de résistance déduit par exemple de la loi de Strickler. Les équations générales du type de la marée constituent un système aux dérivées partielles, non linéaire, de type hyperbolique.

En outre, c'est un problème mixte car il fait intervenir des conditions initiales au temps $t = 0$ et des conditions aux limites variables dans le temps.

La résolution numérique de ce système posait des problèmes difficiles et l'on pouvait se demander si tous les termes de ces équations étaient nécessaires pour bien représenter la réalité dans le cas d'une crue relativement lente. Nous avons vérifié en particulier que, dans ce cas, les termes d'inertie sont faibles par rapport aux autres.

Par ailleurs, on ne peut pas admettre, comme pour les équations de la marée, que le terrain reste entièrement noyé et que les profondeurs sont partout du même ordre de grandeur. Même au maximum de la crue on ne peut négliger l'influence de la topographie du terrain.

$P_i(t)$ est le débit d'eau provenant de la pluie tombant sur le casier i ou de l'évaporation sur ce casier.

$Q_{i,k}$ les débits d'échange entre le casier i et les casiers adjacents k comptés positivement lorsqu'il y a apport d'eau au casier i , ou débit des différentes "liaisons" du casier i .

Il est possible d'écrire autant d'équations du type (1) qu'il y a de casiers i , donc d'inconnues.

On obtient un système d'équations différentielles ordinaires de 1er ordre en Z_i . Il suffit d'imposer les conditions initiales (en l'occurrence les Z_i^0 puisque les $Q_{i,k}$ sont alors déterminés) pour être sûr que la solution du système existe et qu'elle est unique.

L'équation (1) peut être intégrée dans les limites d'un intervalle de temps t :

$$\int_{Z_i}^{Z_i + \Delta Z_i} S_i dZ_i = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} P_i dt + \sum_k \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} Q_{i,k}(Z_i, Z_k) dt$$

d'où en admettant que S_i ne varie pas entre les niveaux Z_i et $Z_i + \Delta Z_i$, c'est-à-dire que la variation de niveau ΔZ_i est faible durant Δt :

$$S_i(Z_i) \cdot \Delta Z_i = P_i(\tau) \cdot \Delta t + \Delta t \sum_k Q_{i,k}(Z_i(\tau), Z_k(\tau)) \quad (2)$$

où :

$$n\Delta t \leq \tau \leq (n+1) \Delta t$$

Cette relation (2) peut être écrite sous une forme encore mieux adaptée à la résolution numérique, mais alors il faut examiner les divers types de lois d'échange entre les casiers :

$$Q_{i,k} = f(Z_i, Z_k) \quad (3)$$

1.2 Lois d'échange entre casiers

Ces lois d'échange sont de deux types :

- La liaison est dite "fluviale" lorsque l'écoulement ne rencontre pas d'obstacle localisé (pertes de charge singulière) mais une rugosité moyenne ;

- La liaison est dite "singulière" lorsqu'une digue, une route... constitue la limite entre les casiers ou plus généralement lorsqu'elle ne peut-être assimilée à une liaison fluviale.

Liaison fluviale

Le débit d'échange est calculé selon la formule :

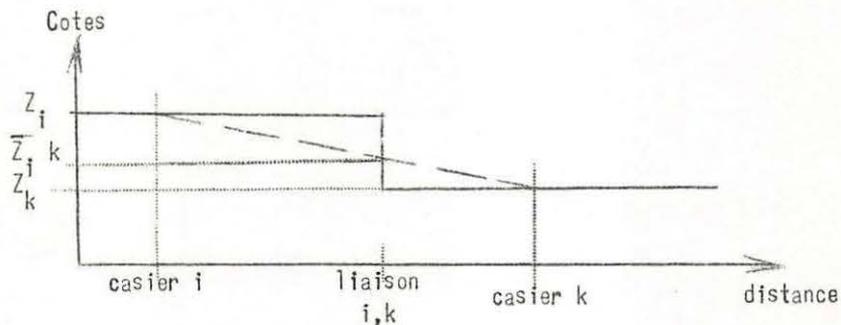
$$|Q_{i,k}| = \phi(\bar{Z}_{i,k}) \sqrt{|Z_k - Z_i|} \quad (4)$$

Dans la formule ci-dessus :

- $Q_{i,k}$ est le débit de la liaison. Son signe sera celui de $Z_k - Z_i$
- Z_i et Z_k les cotes du plan d'eau dans les casiers i et k liés
- $\bar{Z}_{i,k}$ est la "cote pondérée de la liaison",
 $\bar{Z}_{i,k} = \alpha Z_i + (1-\alpha)Z_k$ où α est un coefficient donné constant pour le couple de casiers - α est appelé "coefficient de pondération" de la liaison
- $\phi(\bar{Z}_{i,k})$ est la "débitance réduite" de la liaison à la cote $\bar{Z}_{i,k}$

La fonction $\phi(\bar{Z}_{i,k})$, de même que le coefficient de pondération, doit être préétablie pour la liaison i,k .

Physiquement le calcul du débit revient à fixer la section fictive d'écoulement, en un point du profil en long, située entre les casiers i et k , où sera localisée la perte de charge $Z_k - Z_i$. Pour calculer le débit $Q_{i,k}$, on considère la cote $\bar{Z}_{i,k}$ obtenue par l'interpolation linéaire entre Z_i et Z_k et la "débitance réduite" de cette liaison fictive à cette cote.



Ceci implique que, dans toute la gamme des cotes admissibles au droit de cette liaison fictive, le débit calculé par cette méthode simule correctement le débit réel.

La débitance est dite réduite car elle représente une débitance divisée par le racine carrée de la distance entre les centres des caissons liés ce qui permet de ne plus faire intervenir cette distance.

Liaisons singulières

On utilise les formules classiques pour les déversoirs à seuil épais soit en supposant $Z_k > Z_i$

$$(5a) \quad Q_{i,k} = \phi_D (Z_k - Z_s)^{3/2} \quad \text{en régime dénoyé } Z_i - Z_s < \frac{2}{3}(Z_k - Z_s)$$

$$(5b) \quad Q_{i,k} = \phi_N (Z_i - Z_s) \sqrt{Z_k - Z_i} \quad \text{en régime noyé } Z_i - Z_s \geq \frac{2}{3}(Z_k - Z_s)$$

ϕ_N et ϕ_D sont des coefficients caractéristiques de la liaison. Afin d'assurer la continuité des débits lors du changement de régime, on aura obligatoirement $\phi_D = 0,386 \phi_N$.

Une liaison peut être constituée de plusieurs déversoirs : le calcul de chaque débit élémentaire se fait par tranches verticales puis ces débits sont cumulés. Ceci permet de représenter des liaisons très différentes d'un déversoir à seuil épais avec une bonne approximation.

La loi d'échange peut donc prendre trois formes :

$$(4) \quad Q_{i,k} = \phi \sqrt{|Z_k - Z_i|} \quad \text{liaison fluviale}$$

$$(5a) \quad Q_{i,k} = 0,386 \phi_D (Z_k - Z_s)^{3/2} \quad \text{liaison singulière dénoyée}$$

$$(5b) \quad Q_{i,k} = \phi_N (Z_i - Z_s) \sqrt{Z_k - Z_i} \quad \text{liaison singulière noyée}$$

Ces lois d'échange ne sont valables que pour un régime ou l'influence des forces d'inertie, et donc de la variation de vitesse d'écoulement sur le débit, peuvent être négligées.

2. RESOLUTION NUMERIQUE

Il y a plusieurs façons d'écrire le dernier terme de la relation (2) :

$$S_i(Z_i) \times \Delta Z_i = P_i(\tau) \times \Delta t + \Delta t \sum_k Q_{i,k}(Z_i(\tau), Z_k(\tau)).$$

2.1 Schéma explicite

Si l'on admet que le débit $Q_{i,k}$ ne varie pas pendant la période Δt , on peut écrire $\Delta Z_i \cdot S_i = P_i \Delta t + \sum_k Q_{i,k}^n$ et calculer explicitement ΔZ_i donc Z_i^{n+1} en fonction de Z_i^n et de Z_k^n au temps $n\Delta t$.

2.2 Schéma implicite

On peut aussi admettre, durant l'intervalle Δt , une valeur intermédiaire :

$$Q_{i,k}(Z_i(\tau), Z_k(\tau)) \quad \text{entre les débits}$$

$$Q_{i,k}(Z_i(n\Delta t), Z_k(n\Delta t)) = Q_{i,k}^n \quad \text{à l'instant } n\Delta t \text{ et}$$

$$Q_{i,k}^{n+1} \quad \text{à l'instant } (n+1)\Delta t$$

Dans ce cas on ne peut plus exprimer les niveaux Z_i^{n+1} explicitement à partir des niveaux à l'instant $n\Delta t$ puisque le second membre de l'équation (2) contient des valeurs à l'instant $(n+1)\Delta t$.

Il reste à déterminer la valeur intermédiaire du débit $Q_{i,k}(Z_i(\tau), Z_k(\tau))$ ce qui peut être réalisé de la façon suivante :

$$Q_{i,k}(Z_i(\tau), Z_k(\tau)) = \theta Q_{i,k}^{n+1} + (1-\theta)Q_{i,k}^n \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 1$$

En reportant cette relation dans l'équation (2), on obtient :

$$\Delta Z_i \cdot S_i = P_i \Delta t + \Delta t \left[\theta \sum_k Q_{i,k}^{n+1} + (1-\theta) \sum_k Q_{i,k}^n \right] \quad (6)$$

Les lois d'échange n'étant pas linéaires, on suppose faibles les variations de niveau au cours de l'intervalle Δt et l'on écrit :

$$Q_{i,k}^{n+1} = Q_{i,k}^n + \frac{\partial Q_{i,k}^n}{\partial Z_i} \Delta Z_i + \frac{\partial Q_{i,k}^n}{\partial Z_k} \Delta Z_k$$

L'équation (6) prend alors la forme :

$$S_i^n \frac{\Delta Z_i}{\Delta t} = P_i + \sum_k Q_{i,k}^n + \theta \left[\sum_k \frac{\partial Q_{i,k}^n}{\partial Z_i} \Delta Z_i + \sum_k \frac{\partial Q_{i,k}^n}{\partial Z_k} \Delta Z_k \right] \quad (7)$$

Les ΔZ_k des casiers adjacents au casier i sont associés au ΔZ_i dans cette équation.

Les équations du type (7), écrites pour tous les casiers, forment un système d'équations algébriques linéaires en ΔZ_i dont la résolution à chaque pas de temps Δt donne des résultats valables, à condition que Δt soit suffisamment petit.

Le schéma de différences finies utilisé ici est du type implicite grâce à l'introduction du coefficient θ pour exprimer les dérivées en espace.

2.3 Choix du schéma

Le choix entre les méthodes explicite et implicite a été guidé par un souci d'économie de temps d'ordinateur c'est-à-dire le produit du temps d'un cycle par le nombre de cycles nécessaires, à validité égale des résultats.

On sait que le choix du pas de temps de calcul pose des difficultés. Du point de vue de l'exactitude des résultats, Δt doit être choisi suffisamment petit pour que la linéarisation soit valable surtout lorsque les variations de niveaux sont rapides.

D'autre part, les crues que l'on se propose d'étudier sur un tel schéma sont des crues annuelles lentes. Il faut donc que Δt soit assez grand pour ne pas conduire à des temps de calcul prohibitifs.

Dans le cas d'un schéma explicite, Δt est limité par une condition de stabilité numérique ; dans les grands modèles tels que le Mékong ou le Sénégal, Δt n'aurait pu dépasser 30 mn. Le nombre de cycles aurait été excessif.

La méthode implicite par contre permettait d'atteindre des pas de temps de l'ordre de 6 h en crue et 72 h en étiage ; avec $\theta = 1$ on était sûr d'obtenir un schéma de différences finies inconditionnellement stable.

$$S_i \cdot \frac{\Delta Z_i}{\Delta t} = P_i + \sum_k Q_{i,k}^n + \sum_k \frac{\partial Q_{i,k}^n}{\partial Z_i} \Delta Z_i + \sum_k \frac{\partial Q_{i,k}^n}{\partial Z_k} \Delta Z_k \quad (8)$$

Pour trouver les ΔZ_i il faut, à chaque pas de temps, résoudre un système linéaire comportant autant d'équations (8) que d'inconnues comme on s'en rend compte en introduisant adéquatement les conditions

aux limites. Le nombre d'équations est très élevé mais on s'aperçoit rapidement que la matrice des coefficients des variables ΔZ_i est très creuse, chaque casier n'étant lié qu'à quelques casiers adjacents.

Cette remarque permet d'éviter la résolution de la matrice complète.

3. PROGRAMMATION

3.1 Principes généraux

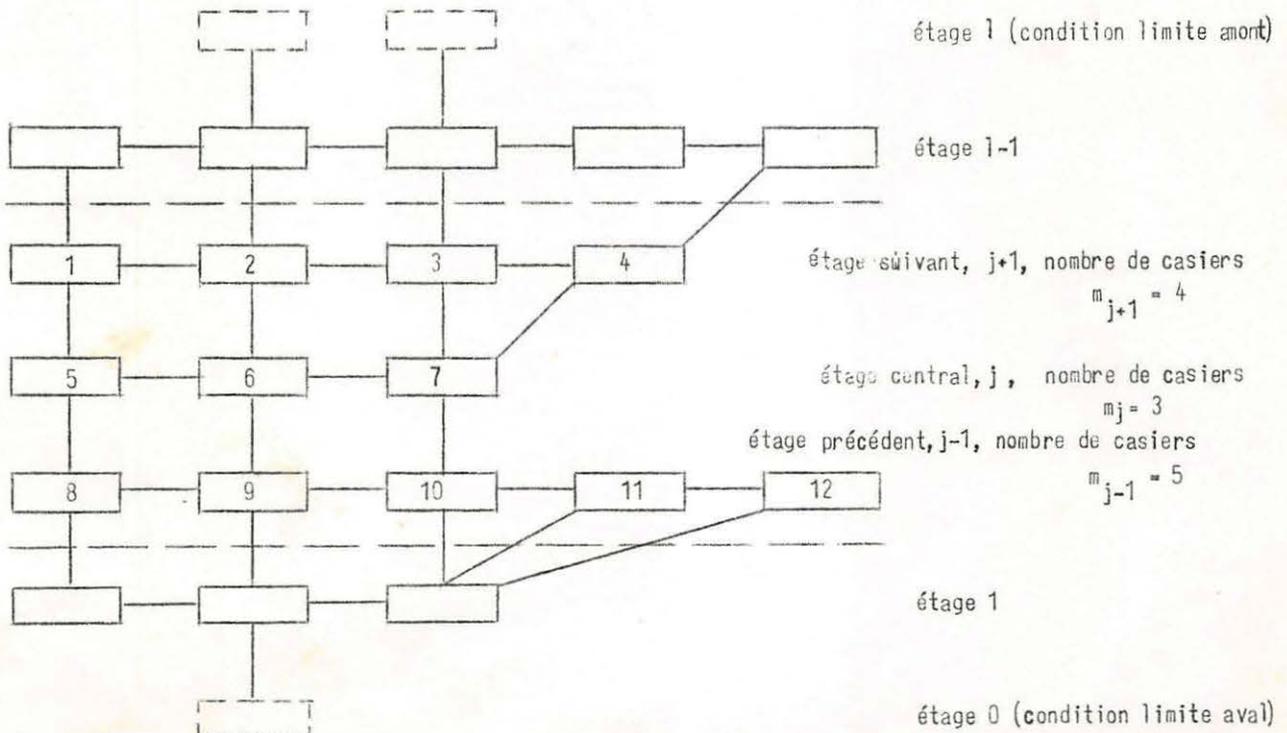
Les casiers formant le modèle doivent être réparties suivant un certain nombre d'"étages" de telle sorte qu'un casier d'un étage j n'ait d'échanges qu'avec des casiers du même étage ou des étages adjacents $j-1$ et $j+1$.

La notion d'étage n'a aucun sens physique pour le modèle. Il s'agit seulement d'un artifice de résolution numérique permettant un gain de temps de calcul considérable.

Les équations (9) :

$$\Delta Z_i \left(-\frac{S_i}{\Delta t} + \sum_k \frac{\partial Q_{i,k}^n}{\partial Z_i} \right) + \sum_k \frac{\partial Q_{i,k}^n}{\partial Z_k} \Delta Z_k + L_i = 0 \quad (9)$$

où le terme libre $L_i = P_i + \sum_k Q_{i,k}^n$ est connu, vont être appliquées à l'étage central j , à l'étage précédent $j-1$ et à l'étage suivant $j+1$ du schéma ci-dessous.



Le tableau de la page suivante groupe les coefficients relatifs à chaque inconnue ΔZ_i .

En utilisant la notation matricielle, on peut écrire les équations de continuité relatives aux points de l'étage central c sous la forme :

$$[M_c] \cdot \{Z_c\} + [M_s] \cdot \{Z_s\} + [M_p] \cdot \{\Delta Z_p\} + \{L_c\} = 0 \quad (10)$$

Où :

$[M_c]$ est une matrice carrée $m_j \times m_j$ de l'étage central

$[M_s]$ est une matrice rectangulaire $m_{j+1} \times m_j$ de l'étage suivant

$[M_p]$ est une matrice rectangulaire $m_{j-1} \times m_j$ de l'étage précédent

$\{\Delta Z_c\}, \{\Delta Z_s\}, \{\Delta Z_p\}$ sont les vecteurs inconnus correspondants

$\{L_c\}$ est le vecteur des termes libres.

Une équation du type (10), s'écrit ainsi pour chaque étage, y compris l'étage 1, où l'on aura en particulier :

$$[M_1] \{\Delta Z_1\} + [M_2] \{\Delta Z_2\} + [M_0] \{\Delta Z_0\} + \{L_1\} = 0 \quad (11)$$

Pour un modèle de L étages, on a $L-1$ équations de ce type et $L+1$ inconnues vectorielles du type $\{\Delta Z_i\}$. Il manque deux équations que nous trouverons dans les conditions limites amont et aval.

Condition aval : les composantes du vecteur $\{\Delta Z_0\}$ peuvent toujours être exprimées en fonction des composantes du vecteur $\{\Delta Z_1\}$ selon la relation :

$$\{\Delta Z_0\} = [E_0] \{\Delta Z_1\} + \{F_0\} \quad (12a)$$

En effet, quelles que soient les conditions (acceptables physiquement) à la limite, on peut toujours trouver, en linéarisant ces conditions, les éléments de la matrice $[E_0]$ et du vecteur $\{F_0\}$: ceci sera vu plus loin.

Par suite en substituant (12a) dans (11) nous avons :

$$[M_1] \{\Delta Z_1\} + [M_2] \{\Delta Z_2\} + [M_0] [E_0] \{\Delta Z_1\} + [M_0] \{F_0\} + \{L_1\} = 0$$

Etage central	Matrice de l'étage central (matrice symétrique)			Matrice de l'étage suivant				Matrice de l'étage précédent					Terme libre
Casiers	ΔZ_5	ΔZ_6	ΔZ_7	ΔZ_1	ΔZ_2	ΔZ_3	ΔZ_4	ΔZ_8	ΔZ_9	ΔZ_{10}	ΔZ_{11}	ΔZ_{12}	L
5	$-\frac{S_5}{\Delta t} + \frac{\partial q_{5,1}}{\partial Z_5}$ $+\frac{\partial q_{5,6}}{\partial Z_5}$ $+\frac{\partial q_{5,8}}{\partial Z_5}$	$\frac{\partial q_{5,6}}{\partial Z_6}$	0	$\frac{\partial q_{6,1}}{\partial Z_1}$	0	0	0	$\frac{\partial q_{5,8}}{\partial Z_8}$	0	0	0	0	$P_5 + Q_{5,1}^n$ $+ Q_{5,6}^n$ $+ Q_{5,8}^n$
6	$\frac{\partial q_{6,5}}{\partial Z_5}$	$-\frac{S_6}{\Delta t} + \frac{\partial q_{6,5}}{\partial Z_6}$ $+\frac{\partial q_{6,2}}{\partial Z_6}$ $+\frac{\partial q_{6,7}}{\partial Z_6} + \frac{\partial q_{6,9}}{\partial Z_6}$	$\frac{\partial q_{6,7}}{\partial Z_7}$	0	$\frac{\partial q_{6,2}}{\partial Z_2}$	0	0	0	$\frac{\partial q_{6,9}}{\partial Z_9}$	0	0	0	$P_6 + Q_{6,5}^n$ $+ Q_{6,2}^n + Q_{6,7}^n$ $+ Q_{6,9}^n$
7	0	$\frac{\partial q_{7,6}}{\partial Z_6}$	$-\frac{S_7}{\Delta t} + \frac{\partial q_{7,6}}{\partial Z_7}$ $+\frac{\partial q_{7,3}}{\partial Z_7}$ $\frac{\partial q_{7,4}}{\partial Z_7} + \frac{\partial q_{7,10}}{\partial Z_7}$	0	0	$\frac{\partial q_{7,3}}{\partial Z_3}$	$\frac{\partial q_{7,4}}{\partial Z_4}$	0	0	$\frac{\partial q_{7,10}}{\partial Z_{10}}$	0	0	$P_7 + Q_{7,6}^n$ $+ Q_{7,3}^n + Q_{7,4}^n$ $+ Q_{7,10}^n$

Avec $Q_{i,k}^n = -Q_{k,i}^n$, $\frac{\partial q_{i,k}}{\partial Z_k} = -\frac{\partial q_{k,i}}{\partial Z_i}$